Hoofdstuk 4 - handig tellen

0. voorkennis

Volgorde bij bewerkingen

1. haakjes
2. machtsverheffen
3. vermenigvuldigen en delen van links naar rechts
4. optellen en aftrekken van links naar rechts

Voorbeeld

Bereken $1 + 2 \cdot 3^2$
Komt er geen 19 uit?
Dan doe je iets niet goed...

Berekeningen met de GR

Als je $\frac{2+3}{3 \cdot 4 \cdot 5}$ wilt bereken op je GR dan moet je **haakjes** gebruiken:

$(2+3) \div (3 \times 4 \times 5)$

Doe je dat niet, dan gaat het niet goed...

1. vermenigvuldigingsregel en somregel

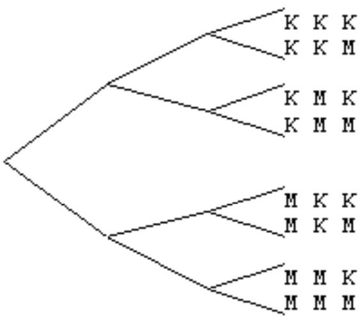
Machtsbomen

Eén manier om handig te kunnen tellen is een **boomdiagram**.

Je gooit 3 keer met een euro (kop of munt). Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er ?

De eerste keer kun je kop of munt gooien, de tweede keer ook en de derde keer ook, dus zijn er 8 mogelijkheden:

Dit kun je aangeven met een boomdiagram, hierbij is naar boven 'kop' en naar beneden 'munt'. Uit elk punt van de boom vertrekken evenveel takken.



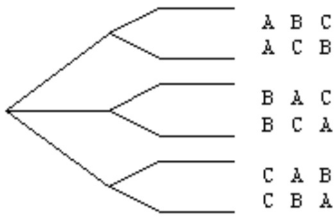
Je kunt het aantal mogelijkheden eenvoudig uitrekenen met machten. Bij elke munt neemt het aantal mogelijkheden toe met een macht. Men noemt dit soort boomdiagrammen wel **machtsbomen**.

Faculteitsbomen

Soms vertrekken er van elk punt niet evenveel takken.

Bij een vereniging worden 3 mensen (A,B en C) in het bestuur gekozen die de functie van voorzitter, penningmeester en secretaris moeten vervullen. Op hoeveel manieren kan men deze 3 functies over deze 3 mensen verdelen?

Je krijgt nu een ander soort boom. Nu vertrekt er van elk punt steeds een lijn minder.



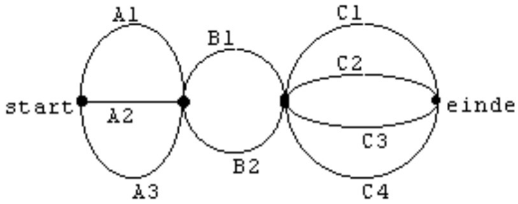
Je maakt hier de vermenigvuldiging:

3 x 2 x 1 = 6.

We noemen een boom als hierboven wel **faculteitsboom**.

Wegendiagrammen

In een **wegendiagram** worden wegen die naar één punt leiden samengevoegd.



Hierboven staat een voorbeeld van een wegendiagram.

Op hoeveel manieren kun je van START naar EINDE ?

Er zijn in totaal 24 verschillende routes van start naar einde mogelijk.
Dit kun je uitrekenen door 3 x 2 x 4 = 24

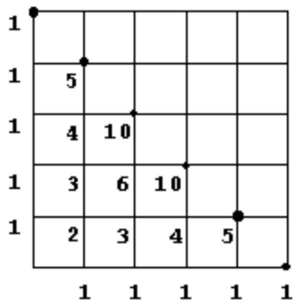
Roosterdiagrammen

Als je bij een telprobleem steeds een keuze gemaakt moet worden uit **twee alternatieven**, dan ontstaat er een zeer regelmatig wegendiagram. We noemen zo'n wegendiagram een **roosterdiagram**. Het ziet er uit als roosterpapier.

Een gezin heeft 5 kinderen. Op hoeveel verschillende manieren kan het gezin zijn samengesteld?

Dit kan op $2^5 = 32$ manieren.

Als je niet op de volgorde let, zijn er 6 verschillende samenstellingen mogelijk. Hierbij gebruik je de **driehoek van Pascal**.



De vermenigvuldigingregel gebruik je als handeling I op p manieren kan **EN** handeling II op q manieren kan. De gecombineerde handeling kan je dan op **p×q** manieren doen.

De somregel gebruik je als handeling I op p manieren kan **OF** handeling II op q manieren kan. De gecombineerde handeling kan je dan op **p+q** manieren doen.

2. tellen met en zonder herhaling

Bij telproblemen gaat het vaak om meerdere handelingen die je na elkaar uitvoert. Je vraagt je dan af op hoeveel manieren je de eerste handeling kan uitvoeren, op hoeveel manieren je de tweede handeling kan uitvoeren, enzovoort. Die aantallen vermenigvuldig je dan met elkaar. Dat is de **vermenigvuldigingsregel**.

Je moet je daarbij wel afvragen of **herhalingen** zijn toegestaan. Soms heb je na de eerste handeling voor de tweede handeling minder keus dan bij eerste handeling, maar soms ook niet...

<table>
<tr>
<td>


In een restaurant kan je kiezen uit 6 voorgerechten, 12 hoofdgerechten en 10 nagerechten.

- ✔ Hoeveel menu's kun je daarmee maken met een voor-hoofd- en nagerecht?
</td>
<td>
Dat kan op 6×12×10=720 manieren
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Een pincode van een bankpas bestaat uit vier cijfers. Het eerste cijfer mag geen nul zijn en de cijfers mogen niet allemaal hetzelfde zijn.

- ✔ Bereken hoeveel verschillende pincodes mogelijk zijn.
</td>
<td>
Het eerste cijfer mag geen nul zijn, dus voor 't eerste cijfer kan je kiezen uit 9 mogelijkheden. Daarna steeds uit 10 mogelijkheden. In totaal zijn er dan 9×10×10×10=9000 mogelijkheden.

Daar van af moeten dan nog de pincodes met allemaal dezelfde cijfers, behalve dan 0000, want die mocht al niet... dus 9 er af!

Het antwoord is 8991.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Je gooit 3 keer met een euro (kop of munt).

1. Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er als de volgorde van belang is?
2. Hoeveel uitkomsten zijn er als de volgorde niet van belang is?
3. Zijn de mogelijk uitkomsten van 2. allemaal even waarschijnlijk?
</td>
<td>
Smijten met geld.

1. Bij elke worp zijn er steeds 2 mogelijkheden (kop of munt) dus 2×2×2=8 manieren.
2. Er zijn 4 mogelijke uitkomsten.
3. Nee... de kans om 3 keer munt te gooien is kleiner dan de kans op 1 of 2 keer munt.
</td>
</tr>
</table>

Bij een vereniging van 50 mensen worden 3 mensen in het bestuur gekozen. ✔ Op hoeveel manieren kan je 3 mensen kiezen uit een groep van 50?	Dat kan op 19.600 manieren. 50·49·48 gedeeld door 6.
In een groep van 10 kinderen worden 3 prijzen verloot. De prijzen worden willekeurig toegewezen...  Op hoeveel manieren kan je de prijzen verdelen als: 1. Een kind meerdere prijzen kan winnen 2. Een kind niet meer dan één prijs kan winnen	Bij de eerste prijs kan je kiezen uit 10... 1. Dat kan op $10^3=1000$ manieren. 2. Dat kan op $10\cdot 9\cdot 8=720$ manieren.

oefeningen telproblemen als PDF

3. permutatie en combinaties

Permutaties	Combinaties
Als je **k** elementen kiest uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element hoogstens één maal gekozen wordt en waarbij **wel** gelet wordt op de volgorde van de elementen dan heb je te maken met een **permutatie** of **rangschikking**. Het aantal permutaties van de letters A, B en C is gelijk aan 3! Dat is '3 faculteit' en is gelijk aan 3·2·1=6 Het aantal permutaties van 3 dingen uit 7 is gelijk aan 7·6·5=120. Permutaties (en faculteiten) kan je gemakkelijk berekenen met je **grafische rekenmachine**. 7 nPr 3 ⟶ 120	Als je **k** elementen kiest uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element hoogstens één maal wordt gekozen en waarbij **niet** gelet wordt op de volgorde dan heb je te maken met een **combinatie**. Het aantal combinaties van 3 dingen kiezen uit 7 is gelijk aan $\binom{7}{3} = 35$. Combinaties kan je gemakkelijk berekenen met je **grafische rekenmachine**. 7 nCr 3 ⟶ 35

Werken met permutaties en combinaties

		Met herhaling?	
		Nee	**Ja**
Is de volgorde van belang?	**Ja**	**Permutaties** $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ faculteitsboom	**Rangschikkingen met herhaling** $aantal = n^k$ machtsboom
	Nee	**Combinaties** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ ja-nee rooster	

Voorbeeld

In een klas zitten 29 leerlingen.

Uit deze klas wordt een klankbordgroep van 3 leerlingen gekozen. Het aantal mogelijke groepen is $\binom{29}{3} = 3654$. Dat zijn **combinaties**.

29 nCr 3 ⟶ 3654

Uit deze klas wordt een comité gekozen bestaande uit een voorzitter, een secretaris en een penningmeester. Het aantal mogelijkheden is $29 \times 28 \times 27 = 21\,924$. Dat zijn **permutaties**...

29 nPr 3 ⟶ 21924

✔ **permutatie en combinaties in voorbeelden**

4. combinaties toepassen

<table>
<tr>
<td>

Werken met permutaties en combinaties

Bij de **terugblik** op pag. 127 staat een mooi voorbeeld.

Uit een groep van 13 jongens en 16 meisjes worden 5 leerlingen gekozen. Het aantal groepen met minstens 4 meisjes is de **som** van het aantal manieren waarop je '1 jongen en 4 meisjes' kan kiezen en het aantal manieren waarop je '5 meisjes kan kiezen'.

$$\binom{16}{4} \times \binom{13}{1} + \binom{16}{5} = 28028$$

Uit een groep van 13 jongens en 16 meisjes wordt een comité gekozen dat bestaat uit een voorzitter, een secretaris en een penningmeester. Het aantal comités dat je kan kiezen van alleen jongens of alleen meisjes is de som van het aantal manieren met alleen jongens en het aantal manieren met alleen meisjes.

$$(13)_3 + (16)_3 = 5076$$

</td>
<td>

Rijtjes met A's en B's

Als je 10 keer met een muntstuk gooit dan zijn er $\binom{10}{3}$ series met 3 keer munt.

Hoeveel verschillende rijtjes kan je maken als je 3 A's en 7 B's hebt?

$$\binom{10}{3}$$

</td>
<td>

Met dobbelstenen gooien

Als je 5 keer met een dobbelsteen gooit dan zijn er 6^5 mogelijke uitkomsten.

Om in totaal 7 ogen te gooien kijk je naar 'vier enen en een drie' en 'drie enen en een twee'. Andere mogelijkheden zijn er niet.

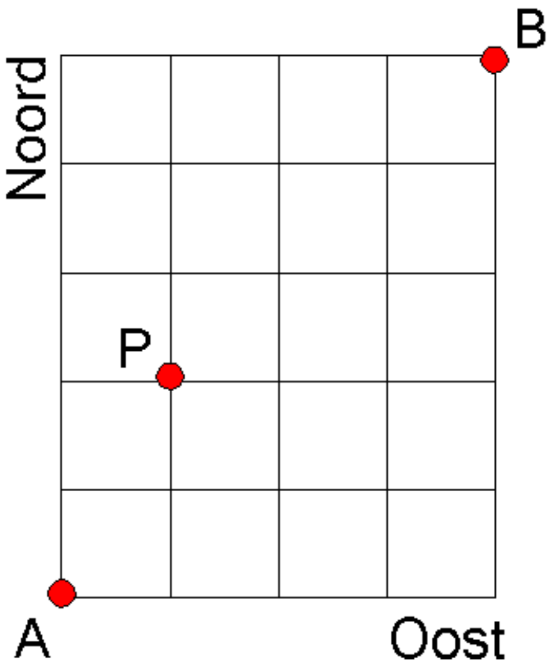
$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 15$$

Het aantal mogelijkheden als je met twee enen begint is:

$$1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

</td>
</tr>
</table>

Routes in een rooster



Het aantal routes van A naar B in het rooster is gelijk aan:

$$\binom{9}{4} = 126$$

Je moet immers 9 keer een keuze maken tussen 'Oost' en 'Noord' en daarbij 4 keer 'Oost' kiezen.

Maar $\binom{9}{5}$ kan natuurlijk ook.

Het aantal **kortste routes** van A naar B via P is gelijk aan:

$$\binom{3}{1} \times \binom{6}{3} = 60$$

Onvolledige roosters

Om in een onvolledig rooster het aantal routes van P naar Q te bepalen zet je bij elk kruispunt het aantal routes om er vanuit P te komen.